مسائل سری پنجم درس فرایندهای اتفاقی

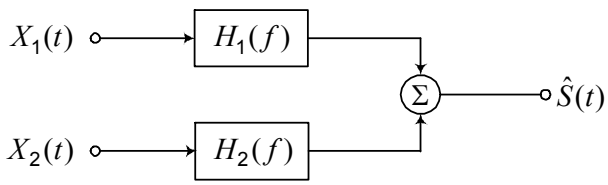
۱- تخمین بهینهٔ درجه دوم متغیر تصادفی S را برحسب متغیر تصادفی X (یعنی به فرم $\hat{S} = a + bX + cX^2$) و با معیار MMS بدست آورید .

۲- فرض کنید $\mathbf{s} = \mathbf{G}\mathbf{w}$ می باشد. در این رابطه $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^t$ یک بردار تصادفی سفید نرمالیزه است که دو مولفهٔ اول آن یعنی w_1 و w_2 مشاهده شده است و $\mathbf{G}$ ماتریسی به قرار زیر است:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

الف) تخمینی با معیار LMMS دو مولفه دیگر یعنی w_3 و w_4 چیست و متوسط مربع خطای این تخمینی چقدر است؟

ب) تخمینی بامعیار LMMS بردار $\mathbf{s}$ را نیز بدست آورید و متوسط مربع خطای تخمین این بردار را نیز حساب کنید.



۳- برای تخمین خطی با معیار MMS فرایند ساکن $S(t)$ برحسب دو فرآیند ساکن قابل مشاهده $X_1(t)$, $X_2(t)$ سیستمی بصورت روبرو در نظر بگیرید و فرض کنید زمان مشاهده از $t = -\infty$ تا $t = \infty$ باشد.

الف) تابع تبدیل فیلترها $H_1(f)$, $H_2(f)$ را بدست آورید.

ب) با فرض آنکه $X_1(t)=S(t)+V_1(t)$ و همچنین $X_2(t)=S(t)+V_2(t)$ بوده که درآن $S(.) \perp V_2(.)$ و $S(.) \perp V_1(.)$ و $V_1(.) \perp V_2(.)$ است. تابع تبدیل فیلترها و متوسط مربع خطای تخمین را برحسب طیف قدرت فرایندهای $S(t)$ و $V_1(t)$ $V_2(t)$ بیان کنید.

۴- ثابت کنید که اگر $Z = \int_0^T S(t)dt$ باشد تخمین خطی Z برحسب $S(T)$ و $S(0)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$\hat{Z} = \hat{\mathrm{E}}\{Z \mid S(0), S(T)\} = \frac{S(0) + S(T)}{R_S(0) + R_S(T)} \int_0^T R_S(t)dt$$

۵- نشان دهید که اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد می‌توان نتیجه گرفت که $R_S(\tau) = Ie^{-\alpha|\tau|}$ می‌باشد.

$$\hat{\mathrm{E}}\{S(t+\lambda) \| S(t), S(t-\tau)\} = \hat{\mathrm{E}}\{S(t+\lambda) | S(t)\}$$

۶- رشته تصادفی $\{X_n\}$ را مارتینگل گویند هرگاه داشته باشیم $\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots, X_1) = X_{n-1}$. ثابت کنید که اگر متغیرهای تصادفی Y_i مستقل از هم و با متوسط صفر باشند آنگاه مجموع آنها $X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ تولید یک رشته تصادفی مارتینگل می‌نماید.

۷- رشته تصادفی $\{X_n\}$ را مارتینگل به مفهوم وسیع گویند هرگاه داشته باشیم $\hat{\mathrm{E}}(X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots, X_1) = X_{n-1}$.

الف) ثابت کنید که اگر رشته‌ای را بتوان بصورت $X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ نوشت که در آن Y_i ها متغیرهای تصادفی متعامد هستند این رشته $\{X_n\}$ مارتنیگل به مفهوم وسیع خواهد بود.

ب) ثابت کنید که اگر رشته $\{X_n\}$ مارتنیگل به مفهوم وسیع باشند خواهیم داشت: $\mathrm{E}X_n^2 \geq \mathrm{E}X_{n-1}^2 \geq \cdots \geq \mathrm{E}X_1^2$

راهنمائی : $X_n = (X_n - X_{n-1}) + X_{n-1}$ و $(X_n - X_{n-1}) \perp X_{n-1}$

۸- فرض کنید $X(t)=S(t)+V(t)$ بوده و $R_{SV}(\tau)=0$ و $R_S(\tau)=A\frac{\sin^2(a\tau)}{\tau^2}$ و $R_V(\tau)=N\delta(\tau)$ باشد. فیلترهای لازم $H_2(f), H_1(f)$ برای تخمین به ترتیب $S(t)$ و $S'(t)$ و برحسب $\{X(\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\}$ را بدست آورید.

۹- ثابت کنید که اگر $S_S(f)=\frac{1}{1+(2\pi f)^4}$ باشد آنگاه بهترین تخمین خطی $S(t+\lambda)$ برحسب $\{S(t-\alpha):\alpha\geq 0\}$ برابر خواهد بود با $\hat{S}(t+\lambda)=b_oS(t)+b_1S'(t)$ که در آن $b_o=e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}})$ و $b_1=\sqrt{2}e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ می‌باشد.

۱۰- اگر $X(n)=S(n)+V(n)$ باشد که درآن $R_{SV}(m)=0$ و $R_V(m)=5\delta(m)$ و $R_S(m)=5\times 0.8^{|m|}$ است تخمینهای خطی زیر و خطای آنها را پیدا کنید.

الف) تخمین $S(n)$ برحسب کل $X(n)$

ب) تخمین $S(n)$ برحسب $X(n)$ و گذشته آن

ج) تخمین $S(n+1)$ برحسب $S(n)$ و گذشته آن

د) تخمین $S(n+1)$ برحسب $X(n)$ و گذشته آن

۱۱- می‌خواهیم تخمین خطی سیگنال تلگرافی $S(t)$ را برحسب $X(t)=S(t)+V(t)$ و گذشته آن بدست آوریم که در آن $R_{SV}(\tau)=0$ و $R_V(\tau)=N\delta(\tau)$ و $R_S(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$ می‌باشد.

ثابت کنید $\hat{S}(t)=(c-2\lambda)\int_0^\infty X(t-\alpha)e^{-c\alpha}d\alpha$ خواهد بود که در آن $c=2\lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda N}}$ می‌باشد.

۱۲- اگر $X(t)=S(t)+V(t)$ باشد که در آن $R_{SV}(\tau)=o$ و $R_V(\tau)=5\delta(\tau)$ و $R_S(\tau)=5e^{-0.2|\tau|}$ است تخمینهای خطی زیر را بدست آورده و خطای آنها را پیدا کنید.

الف) تخمین $S(t)$ بر حسب کل $X(t)$

ب) تخمین $S(t)$ بر حسب $X(t)$ و گذشتهٔ آن

ج) تخمین $S(t+2)$ بر حسب $S(t)$ و گذشتهٔ آن

د) تخمین $S(t+2)$ بر حسب $X(t)$ و گذشتهٔ آن

۱۳- خروجی یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(f)=\frac{1-j2\pi f}{1+j2\pi f}$ در دسترس میباشد. میخواهیم بر اساس مشاهداتی که روی این خروجی انجام میگردد ورودی آنرا $S(t)$ بصورت خطی تخمین بزنیم. فرض کنید $S(t)$ فرایند ساکنی با طیف قدرت $S_S(f)=\frac{1}{4+4\pi^2f^2}$ میباشد.

الف) اگر خروجی سیستم در فاصله زمانی $(-\infty,t]$ مشاهده شده باشد بهترین تخمین خطی ورودی $S(t)$ بر حسب این مشاهدات با چه رابطه ای بیان میگردد و متوسط مربع خطای این تخمین چقدر است؟

ب) بند الف را با فرض آنکه خروجی سیستم در فاصله زمانی $(-\infty,+\infty)$ مشاهده شده باشد نیز حل کنید.

۱۴- یک فرایند AR(N) در نظر بگیرید.

$$S(n) = -a_1 S(n-1) - a_2 S(n-2) - \mathrm{L} - a_N S(n-N) + b_0 V(n)$$

و فرض کنید که همه ریشه های معادله AR یعنی معادله $1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \mathrm{L} + a_N z^{-N} = 0$ داخل دایره واحد است.

الف) ثابت کنید $V(n)$ بر $S(n-1)$ و $S(n-2)$ و $S(n-3)$ و L یعنی بر کلیه نمونه های قبلی فرایند S عمود است.

ب) با استفاده از بند الف و بکمک اصل تعامد ثابت کنید که یک قدم پیشگوئی $S(n)$ از روی کل گذشته آن از رابطه $\hat{S}_1(n) = \hat{E}[S(n)|S(n-k): k \geq 1] = -\sum_{i=1}^{N} a_i S(n-i)$ بدست می آید.

ج) با استفاده از بند الف و ب و بکمک اصل تعامد ثابت کنید که دو قدم پیشگوئی $S(n)$ از روی کل گذشته آن از رابطه بدست $\hat{S}_2(n) = \hat{E}[S(n)|S(n-k): k \geq 2] = -a_1 \hat{S}_1(n-1) - \sum_{i=1}^{N} a_i S(n-i)$ می آید.